Wenn der Donut zur Tasse wird

Abstrakte mathematische Formen und verworrene Knoten prägen Anna Beliakovas Arbeitsalltag. Gelingt es ihr, diese Objekte besser zu verstehen, könnte auch die Teilchenphysik davon profitieren. Von Felix Würsten

Ob Donut oder Tasse, das macht für eine Topologin wie Anna Beliakova keinen grossen Unterschied. Denn so unterschiedlich die beiden Gegenstände auch sind, haben sie doch eine Gemeinsamkeit: «Aus einem Donut lässt sich durch Dehnen, Stauchen und Verbiegen eine Tasse formen und umgekehrt», erklärt die Professorin am Institut für Mathematik. «Oder in der Sprache der Topologie: Donut und Tasse sind äquivalent und gehören demnach zur gleiche Klasse.» Ein Wasserglas hingegen ist etwas ganz anderes: Ihm fehlt der Henkel, aus dem sich das Loch im Donut formen liesse, und daher gehört es auch zu einer anderen Klasse.

Im Gegensatz zur Geometrie definiert die Topologie, die sich als wichtiges Teilgebiet der Mathematik ebenfalls mit räumlichen Problemen befasst, den Begriff Äquivalenz viel flexibler. In der Topologie ist demnach alles äquivalent, was sich ineinander verformen lässt, so wie eben Tasse und Donut. Das grundlegende Problem besteht nun darin, zu entscheiden, ob zwei beliebige Objekte topologisch äquivalent sind oder nicht. Obwohl die Topologie bereits über 100 Jahre alt ist, konnte dieses Problem bisher nur für den einfachsten Fall gelöst werden, nämlich wenn sich die Objekte anhand ihrer zweidimensionalen Oberfläche beschreiben lassen, so wie dies bei Donut und Tasse eben der Fall ist.

Formen jenseits der Vorstellungskraft

Trotz dieser Einschränkung hat die Topologie für die Physik heute eine grosse Bedeutung. Die Einteilung von Flächen in topologische Klassen ist eine wichtige Grundlage für viele physikalische Theorien. Zu diesen gehört auch die Stringtheorie, von der sich die Physiker nichts weniger als die Vereinigung der vier Elementarkräfte erhoffen. Sie basiert auf dem Konzept, dass die fundamentalen Objekte der Materie keine Punkte sind, wie man angenommen hat, sondern längliche Fäden (engl. Strings). «Die Eigenschaften dieser Strings berechnen die Physiker mit Hilfe zweidimensionaler Flächen, und dazu brauchen sie die Methoden der Topologie», erklärt Anna Beliakova. «Wenn es uns gelingen würde, nicht nur zweidimensionale, sondern auch dreidimensionale Objekte topologisch vollständig zu klassifizieren, könnte dies der Teilchenphysik neue Impulse verleihen.»

Erschwerend dabei ist, dass es neben den dreidimensionalen Objekten, die man sich aufgrund der Alltagserfahrung einigermassen räumlich vorstellen kann, noch unzählige weitere Formen gibt. «Doch diese Formen können nur mit den Methoden der Topologie entdeckt werden», hält Anna Beliakova fest. «Sie sind derart komplex, dass sie nur in Räumen mit vier, fünf oder noch mehr Dimensionen dargestellt werden können. Deshalb kann man sich auch nicht mehr vorstellen, wie diese Formen in der Realität aussehen würden.»

Knoten charakterisieren

Eine zentrale Rolle für die Klassifizierung dieser Formen spielen die mathematischen Knoten. Seit den 1970er-Jahren weiss man, dass jedes dreidimensionale Objekt durch bestimmte Rechenschritte aus einem Knoten oder aus einer Verschlingung hergestellt werden kann. Will man dreidimensionale Formen also klassifizieren, reicht es, die Vielfalt aller Knoten zu verstehen. Ähnlich wie bei Donuts, Gläsern und Tassen suchen die Topologen auch bei den Knoten nach Wegen, wie man möglichst effizient und zuverlässig erkennen kann, ob zwei Knoten äquivalent sind oder nicht.

Was dies genau bedeutet, lässt sich an einem Beispiel aus der Alltagswelt illustrieren: In der Regel lässt sich bei einem verknoteten Seil nicht sofort erkennen, ob es sich um einen trivialen Knoten handelt, der sich mit wenigen Handgriffen in einen Kreis umformen lässt, oder um einen verschlungenen Knoten, bei dem dies eben nicht möglich ist. Um dieses Problem zu lösen, haben die Mathematiker das Konzept der Invarianten entwickelt. Eine Invariante ist eine mathematische Grösse, die sich für jeden Knoten bestimmen lässt und die sich nicht verändert, wenn der Knoten umgeformt wird. Weist die Invariante bei zwei Knoten einen unterschiedlichen Wert auf, sind die beiden Knoten nicht äquivalent. Das Umgekehrte gilt allerdings nicht: Zwei Knoten mit gleicher Invariante können trotzdem verschiedenen Klassen angehören.

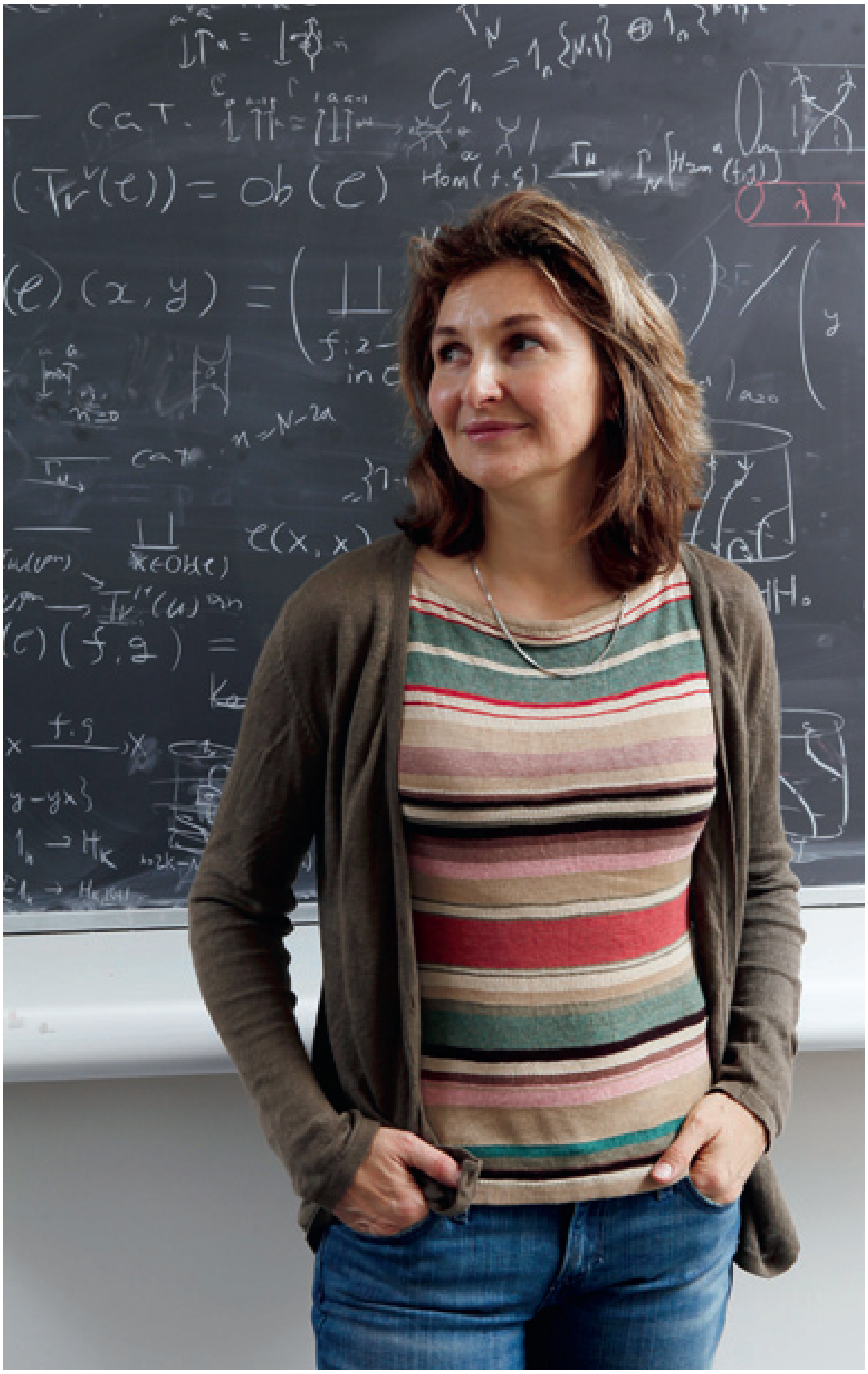
Das Ziel der Topologen ist es nun, Invarianten zu entdecken, die sich einerseits schnell berechnen lassen und mit denen sich andererseits möglichst viele Arten von Knoten unterscheiden lassen. Gelänge es eines Tages sogar, eine Invariante zu finden, die alle möglichen Knotenformen zu trennen vermag, wäre man dem Ziel, alle dreidimensionalen Objekte topologisch zu beschreiben, einen grossen Schritt näher gekommen.

Türen öffnen für Mathematik und Physik

Die Suche nach geeigneten Invarianten erwies sich allerdings als zähes Unterfangen: Nach ersten Erfolgen in den 1920er-Jahren dauerte es mehr als 60 Jahre, bis die Topologen weitere aussagekräftige Invarianten für mathematische Knoten entdeckten. Ein wichtiger Durchbruch gelang dem Amerikaner Vaughan Jones in den 1980er-Jahren. Aus dem von ihm entwickelten «Jones-Polynom» lässt sich eine Fülle von Invarianten ableiten, die für die Charakterisierung von Knoten verwendet werden können. Diese Invarianten besser zu verstehen, ist ein wichtiges Ziel von Anna Beliakovas Arbeit.

Eine neue Richtung erhielt ihr Forschungsgebiet durch eine Theorie, die der Russe Mikhail Khovanov vor wenigen Jahren entwickelte: «Dank dieser Theorie wissen wir heute, dass wir mit dem Jones-Polynom erst an der Oberfläche kratzen und dass die Klassifikation der Knoten eine viel tiefere Bedeutung hat, als wir bis jetzt ahnten», erläutert sie. Aus diesem Grund befasst sie sich nicht nur mit dem Jones-Polynom, sondern auch mit der von Khovanov entwickelten Invariante, die sie auf dreidimensionale Objekte übertragen will. Sollte dies gelingen, wäre dies ein wichtiger Durchbruch für die vollständige

Websites: www.math.uzh.ch www.junior-euler-society.ch



Beschäftigt sich mit abstrakten räumlichen Problemen: die Mathematikerin Anna Beliakova.

Klassifizierung dreidimensionaler Objekte. «Dies würde nicht nur der Physik, sondern auch der Mathematik neue Türen öffnen», ist sie überzeugt.

Helle Köpfe fördern

Dass sie sich mit ihrer Arbeit auf einer sehr abstrakten Ebene bewegt, die sie kaum jemandem verständlich machen kann, damit hat sich Anna Beliakova inzwischen abgefunden. «Es gibt nur wenige Leute, mit denen ich mich wirklich austauschen kann», meint sie lachend. Artikel, die in der letzten Zeit über sie veröffentlicht wurden, befassen sich denn auch kaum mit ihrer eigentlichen wissenschaftlichen Tätigkeit, sondern mit ihrem Engagement für die Nachwuchsförderung, die ihr neben ihrer Forschungsarbeit besonders am Herzen liegt.

Ihrer Ansicht nach werden talentierte Jugendliche in der Schweiz viel zu wenig gefördert – im Gegensatz etwa zu ihrer Heimat Weissrussland, wo begabte Kinder frühzeitig unterstützt werden. Anna Beliakova hat deshalb an der Universität Zürich die Euler Junior Society gegründet, die sich mit ihrem Angebot an besonders begabte Jugendliche richtet. An einzelnen Nachmittagen treffen sich jeweils pfiffige Jungen und Mädchen, um gemeinsam mathematische Probleme zu lösen. «Wir vermitteln keinen Schulstoff und bereiten auch nicht auf das Hochschulstudium vor, sondern bringen den Jugendlichen auf anschauliche Weise die mathematische Denkweise näher», hält Anna Beliakova fest. Dass Bedarf nach einem solchen Angebot besteht, zeigt die erfreuliche Nachfrage: Etwa 40 Schülerinnen und Schüler kommen jeweils an die Universität Zürich, um sich in ihrer Freizeit mit Logik, Kombinatorik oder Geometrie zu beschäftigen – und letzthin sogar auch mit Topologie.

Kontakt: Prof. Anna Beliakova, anna@math.uzh.ch